Als Folge der Entropieformel (22a) tritt eine geringfügige *Entropievermehrung* auf, wenn zwei Gesamtheiten gleicher Temperatur in Wärmekontakt gebracht werden; in der Näherungsformel (22b) drückt sich das in der Nichtlinearität des eingeklammerten Gliedes aus. Der Effekt verschwindet also mit zunehmender Teilchenzahl. Die Entropiezunahme entspricht der Unmöglichkeit, die Vereinigung von Gesamtheiten quasistatisch durchzuführen, da das die Aufrechterhaltung des ergodischen Charakters jeder Gesamtheit für sich voraussetzen würde. Die Vereinigung ist dementsprechend auch nicht reversibel, da bei der Trennung eine Energiestreuung auftritt, wie sie oben (S. 357) berechnet wurde.

Ergebnis

Das Ziel dieser Untersuchung ist *nicht* die Verschärfung der üblichen statistischen Formeln für Gesamtheiten aus wenigen Teilchen. (Die z. B. bei der Energieverteilung (17) oder der Entropieformel (22, 22a) gefundene Abweichung verschwindet für große Teilchenzahlen und ist für kleine von der strengen Gültigkeit der Ergodenhypothese abhängig.) Es sollte vielmehr gezeigt werden, daß eine Reihe zur statistischen Begründung der Thermodynamik für nötig gehaltener Voraussetzungen überflüssig ist: *Es ist keineswegs grundsätzlich erforderlich, daß Gesamtheiten aus sehr vielen („unendlich vielen") Einzelteilchen betrachtet werden, oder daß diese alle, oder ein Teil als gleich vorausgesetzt werden*, um thermodynamische Größen einzuführen. *Es ist auch keineswegs nötig, Einteilungen des Phasenraumes zur Definition von Komplexionen-Anzahlen vorzunehmen*, sondern bereits aus rein klassischen, stetigen Ansätzen folgen recht einfach die beiden ersten Hauptsätze. (Das Nernstsche Theorem kann natürlich *nicht* geliefert werden.) Es zeigt sich vielmehr, daß das Ergebnis $S - S_0 = k \ln J$ im *Gegensatz* zur Boltzmann-Planckschen Grundannahme $S = k \ln W$ steht, denn man kann das Phasenvolumen J allenfalls (nach Normierung mit der entsprechenden Potenz von h) als Zahl der Realisierungsmöglichkeiten für alle Verteilungen mit einer *kleineren Energie* als der gegebenen deuten.

Es ist bemerkenswert, daß die hier durchgeführte Methode der Faltung kanonisch invarianter Phasendichten zwanglos zur Definition von Größen führt, die die thermodynamischen Differentialgleichungen *exakt* erfüllen, die für eine abgeschlossene Gesamtheit also einen bestimmten Betrag haben und nicht etwa „statistisch" schwanken.

Zur Reduktion des Dreikörperproblems

Von Peter Musen [1]

(Z. Naturforschg. **3a**, 360—363 [1948]; eingegangen am 11. Februar 1948)

Die Transformationstheorie des Pfaffschen Ausdruckes wird zur Reduktion des Dreikörperproblems auf acht Koordinaten verwendet. Es wird gezeigt, daß die klassischen Reduktionen kurz durch die Formierung der Pfaffschen Differentialgleichungen für den passend transformierten Pfaffschen Ausdruck gewonnen werden können. Zum Schluß werden die Differentialgleichungen für die Vektorelemente aufgestellt. Die eingeführten Vektorelemente haben eine gewisse Ähnlichkeit mit den Vektorelementen, welche Bilimowitsch in der allgemeinen Störungstheorie benutzt hatte.

Bilimowitsch[2] hat die Anwendung der Transformationstheorie des Pfaffschen Ausdruckes

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i \cdot d\mathfrak{Q}_i + \sum_{j=1}^{m} U_j \, du_j$$

und der zugeordneten ersten Pfaffschen Gleichungen[3]

$$-d\mathfrak{P}_i + \sum \frac{\partial U_j}{\partial \mathfrak{Q}_j} du_j = 0 ,$$

$$d\mathfrak{Q}_i + \sum \frac{\partial U_j}{\partial \mathfrak{P}_i} du_j = 0 ,$$

$$-dU_k + \sum \frac{\partial U_j}{\partial u_k} du_j = 0$$

[1] (14b) Saulgau, Bachstraße 4.

[2] A. Bilimowitsch, Astronom. Nachr. **273**, Heft 4, S. 161.

[3] Vgl. z. B. E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, Berlin 1924, XI. Kapitel.

für die *Zwecke der astronomischen Störungstheorie* entwickelt.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Theorie zur Reduktion des Dreikörperproblems auf acht Freiheitsgrade verwendet.

Bezeichnen wir mit $m_i, \mathfrak{r}_i, \mathfrak{v}_i = m_i \dot{\mathfrak{r}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Massen, die Ortsvektoren und die Bewegungsgrößen von drei Körpern in bezug auf einen festen Punkt, so lauten die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems bekanntlich:

$$\dot{\mathfrak{v}}_i = -\operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_i} H, \qquad \dot{\mathfrak{r}}_i = +\operatorname{grad}_{\mathfrak{v}_i} H, \tag{1}$$

$$H = \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{\mathfrak{v}_j^2}{m_j} - \frac{k^2 m_j m_{j+1}}{|\mathfrak{r}_j - \mathfrak{r}_{j+1}|} \right]$$

$$(i, j = 1, 2, 3; \qquad m_4 = m_1, \mathfrak{r}_4 = \mathfrak{r}_1).$$

Dieses letztere System der Differentialgleichungen ist kanonisch und kann folglich als das erste Pfaffsche Gleichungssystem für den Ausdruck

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{v}_i \, d\mathfrak{r}_i - H\,dt \tag{2}$$

betrachtet werden. Die weitere Reduktion von (1) besteht jetzt in der Transformation von (2) und in der Formierung der neuen Pfaffschen Differentialgleichungen. Von besonderer Wichtigkeit dabei ist die Möglichkeit, ein vollständiges Differential fortzulassen.

Mit Rücksicht auf die Integrale des Schwerpunktes

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \mathfrak{r}_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{v}_i = 0$$

kann der Pfaffsche Ausdruck (2) immer durch den Ansatz

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_1 &= M[A(m_2 + m_3) - C m_2]\,\mathfrak{r} + N[B(m_2 + m_3) - D m_2]\,\mathfrak{r}', \\
\mathfrak{r}_2 &= M[C(m_1 + m_3) - A m_1]\,\mathfrak{r} + N[D(m_1 + m_3) - B m_1]\,\mathfrak{r}', \\
\mathfrak{r}_3 &= -M[A m_1 + C m_2]\,\mathfrak{r} - N[B m_1 + D m_2]\,\mathfrak{r}', \\
\mathfrak{v}_1 &= m_1 K[A(m_2 + m_3) - C m_2]\,\mathfrak{v} + m_1 L[B(m_2 + m_3) - D m_2]\,\mathfrak{v}', \\
\mathfrak{v}_2 &= m_2 K[C(m_1 + m_3) - A m_1]\,\mathfrak{v} + m_2 L[D(m_1 + m_3) - B m_1]\,\mathfrak{v}', \\
\mathfrak{v}_3 &= -m_3 K[A m_1 + C m_2]\,\mathfrak{v} - m_3 L[B m_1 + D m_2]\,\mathfrak{v}'
\end{aligned}$$

auf den kanonischen Ausdruck

$$\Phi = \mathfrak{v}\,d\mathfrak{r} + \mathfrak{v}'\,d\mathfrak{r}' - H\,dt \tag{3}$$

mit zwölf skalaren Veränderlichen gebracht werden. Die notwendige Bedingung dazu ist, wie die Methode der unbestimmten Koeffizienten zeigt,

$$(A - C)(B - D)\,m_1 m_2 + (A B m_1 + C D m_2)\,m_3 = 0.$$

Dem Ansatze

$$\begin{aligned}
A &= -m_2 (m_1 + m_2)^{-1} (m_1 + m_2 + m_3)^{-1}, \\
C &= m_1 (m_1 + m_2)^{-1} (m_1 + m_2 + m_3)^{-1}, \\
B &= D = (m_1 + m_2 + m_3)^{-1}
\end{aligned}$$

entspricht der Fall von zwei fiktiven Jacobischen Planeten P und P′; die Massen dieser Planeten sind

$$m = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1},$$

$$m' = (m_1 + m_2)\, m_3 (m_1 + m_2 + m_3)^{-1},$$

die Ortsvektoren sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$, die Bewegungsgrößen sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$. Wir bezeichnen mit u das Argument der Breite von P, mit $\mathfrak{r}_0$ den Einheitsvektor und mit r den absoluten Betrag von $\mathfrak{r}$. Die Bezeichnungen u', $\mathfrak{r}_0'$, r' haben die analoge Bedeutung für P′. Wir behalten auch die üblichen Bezeichnungen für die astronomischen Elemente von P und P′ in bezug auf die unveränderliche Ebene des Systems bei:

$$a, e, i, \Omega, \omega, \tau, n,$$

$$a', e', i', \Omega', \omega', \tau', n'.$$

Mit τ und τ' haben wir hier die Zeiten der Periheldurchgänge und mit n, n' die mittleren Winkelgeschwindigkeiten bezeichnet.

Die Differentialgleichungen der Bewegung der fiktiven Jacobischen Planeten lassen die Flächenintegrale zu, welche wir in der folgenden Form niederlegen:

$$m\,r^2\,|\dot{\mathfrak{r}}_0|\,\cos i + m'\,r'^2\,|\dot{\mathfrak{r}}'_0|\,\cos i' = K, \quad (K = \text{const})$$

$$m\,r^2\,|\dot{\mathfrak{r}}_0|\,\sin i - m'\,r'^2\,|\dot{\mathfrak{r}}'_0|\,\sin i' = 0\,, \tag{4}$$

$$\Omega' = \Omega + 180^\circ\,.$$

Um jetzt das Dreikörperproblem auf ein System mit nur acht Freiheitsgraden zu bringen, müssen wir die Koordinaten der drei Körper so wählen, daß der Ausdruck

$$\mathfrak{v}\,d\mathfrak{r} + \mathfrak{v}'\,d\mathfrak{r}'$$

durch die Summe von nur vier Gliedern dargestellt wird.

Aus geometrischen Gründen können wir unmittelbar einsehen, daß

$$\mathfrak{v}\,d\mathfrak{r} + \mathfrak{v}'\,d\mathfrak{r}' = m\left(\frac{dr}{dt}\,dr + r^2\,|\dot{\mathfrak{r}}_0|\,|d\mathfrak{r}_0|\right) + m'\left(\frac{dr'}{dt}\,dr' + r'^2\,|\dot{\mathfrak{r}}'_0|\,|d\mathfrak{r}'_0|\right)$$

und

$$|d\mathfrak{r}_0| = du + \cos i\,d\Omega, \quad |d\mathfrak{r}'_0| = du' + \cos i'\,d\Omega'$$

mit Rücksicht auf (4) und daß nach der Vernachlässigung von $K\,d\Omega$ der Pfaffsche Ausdruck auf folgende Form gebracht wird:

$$\Phi = m\,\frac{dr}{dt}\,dr + m\,r'^2\,|\dot{\mathfrak{r}}_0|\,du + m'\,\frac{dr'}{dt}\,dr' + m'\,r'^2\,|\dot{\mathfrak{r}}'_0|\,du' - H\,dt\,.$$

Daraus erkennt man, daß wir den Pfaffschen Ausdruck auf die kanonische Form mit nur acht Veränderlichen bringen können, wenn wir für diese Veränderlichen die Radauschen Koordinaten

$$p_1 = m\,\frac{dr}{dt}\,, \qquad p_2 = m'\,\frac{dr'}{dt}\,,$$

$$q_1 = r\,, \qquad q_2 = r'\,,$$

$$p_3 = m\,r^2\,|\dot{\mathfrak{r}}_0|\,, \qquad p_4 = m'\,r'^2\,|\dot{\mathfrak{r}}'_0|\,,$$

$$q_3 = u\,, \qquad q_4 = u'$$

der drei Körper wählen. Für diese Koordinaten nimmt Φ die Gestalt:

$$\Phi = q_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + p_3\,dq_3 + p_4\,dq_4 - H\,dt$$

an, und die entsprechenden Pfaffschen Gleichungen lauten:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\,, \quad \frac{dq_k}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Um die Gleichungen für die kanonischen Delaunayschen Elemente

$$L = m\sqrt{\mu\,a}\,, \qquad G = m\sqrt{\mu\,a\,(1 - e^2)}\,,$$

$$L' = m'\sqrt{\mu'\,a'}\,, \qquad G' = m'\sqrt{\mu'\,a'\,(1 - e'^2)}\,,$$

$$l = n\,(t - \tau)\,, \quad g = \omega\,, \quad \mu = k^2\,(m_1 + m_2)\,,$$

$$l' = n'\,(t - \tau')\,, \quad g' = \omega'\,, \quad \mu' = k^2\,(m_1 + m_2 + m_3)$$

zu erhalten, stellen wir die erste der Gln. (4) in der Form

$$G\,\cos i + G'\,\cos i' = K \tag{5}$$

dar und bemerken folgendes: in der Abhandlung von Bilimowitsch[4] befindet sich in der impliziten Form die Formel

$$\Phi = G\,\cos i\,d\Omega + G\,dg + L\,dl - \left(\frac{\mu^2}{2\,L^2} + H\right)dt\,, \tag{6}$$

welche für den Fall von nur einem gestörten Planeten gilt. Diese Formel läßt sich offensichtlich, mit Rücksicht auf (5), für unseren Fall folgendermaßen anschreiben:

$$\Phi = G\,dg + L\,dl + G'\,dg' + L'\,dl' - F\,dt\,, \tag{7}$$

$$F = \frac{\nu^2}{2\,L^2} + \frac{\nu'^2}{2\,L'^2} + H\,, \qquad \nu^2 = m^3\,\mu^2\,, \qquad \nu'^2 = m'^3\,\mu'^2\,.$$

[4] A. Bilimowitsch[2], S. 171.

Daraus folgt sofort das System der achten Ordnung[5]:

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial g}, \quad \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial l}, \quad \frac{dg}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial G}, \quad \frac{dl}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial L},$$

$$\frac{dG'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial g'}, \quad \frac{\partial L'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial l'}, \quad \frac{dg'}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial G'}, \quad \frac{dl'}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial L'}.$$

Jetzt führen wir die folgenden Vektoren ein:

$$\mathfrak{C} = C\,\mathfrak{k}, \qquad C = G, \qquad \mathfrak{D} = \nu\, e\,(\mathfrak{i} \cos\omega + \mathfrak{j} \sin\omega), \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{D} + \tau\,\mathfrak{C}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{C}' = C'\,\mathfrak{k}, \qquad C' = G', \qquad \mathfrak{D}' = \nu' e' (\mathfrak{i} \cos\omega' + \mathfrak{j} \sin\omega'), \qquad \mathfrak{E}' = \mathfrak{D}' + \tau'\,\mathfrak{C}', \tag{8'}$$

wobei $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k})$ die Grundvektoren des unveränderlichen orthogonalen Dreikantes bedeuten. Mit Hilfe dieser Vektoren läßt sich der Ausdruck (7) in zwei getrennte Ausdrücke zerlegen:

$$\Psi = \frac{1}{D^2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, d\mathfrak{D}) + \frac{1}{2}\,\frac{\nu^2 - D^2}{C^2}\, d\tau - F\,dt, \tag{9}$$

$$\Psi' = \frac{1}{D'^2}(\mathfrak{C}', \mathfrak{D}', d\mathfrak{D}') - \frac{1}{2}\,\frac{\nu'^2 - D'^2}{C'^2}\, d\tau' - F\,dt. \tag{9'}$$

Dem Ausdrucke (9) entsprechen aber die Milankowitschschen[6] Differentialgleichungen

$$\dot{\mathfrak{C}} + [\mathfrak{C}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} F] + [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} F] = 0,$$

$$\dot{\mathfrak{D}} + [\mathfrak{D}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} F] + \frac{\nu^2 - D^2}{C^2}[\mathfrak{C}, \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} F] - \frac{C^2}{D^2}\frac{\partial F}{\partial \tau}\mathfrak{D} = 0, \qquad \frac{d\tau}{dt} + \frac{C^2}{D^2}\mathfrak{D} \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} F = 0.$$

Die Transformation dieser Gleichungen auf die neuen Veränderlichen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{E}$ führt, wie eine leichte Rechnung zeigt, mit Rücksicht auf (8) und auf die Gleichung

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} F = \frac{\partial F}{\partial C}\,\mathfrak{k}$$

zu den Gleichungen

$$\frac{dC}{dt} + (\mathfrak{k}, \mathfrak{E}, \operatorname{grad} F) = 0, \qquad \dot{\mathfrak{E}} + \frac{\partial F}{\partial C}[\mathfrak{E}, \mathfrak{k}] + [\mathfrak{K}, \operatorname{grad} F] = 0,$$

$$\mathfrak{K} = \frac{2}{C^2}(\mathfrak{E}, \mathfrak{C})\,\mathfrak{E} + \left(\frac{\nu^2 - D^2}{C^2} - \frac{(\mathfrak{E}, \mathfrak{C})^2}{C^4}\right) + \frac{C^2}{D^2}[\mathfrak{C}, \mathfrak{E}]. \tag{10}$$

Dabei ist

$$D = |[\mathfrak{E}, \mathfrak{k}]|,$$

und mit $\operatorname{grad} F$ ist der partielle, nach $\mathfrak{E}$ genommene Gradient bezeichnet. Analog erhalten wir auch

$$\frac{dC'}{dt} + (\mathfrak{k}, \mathfrak{E}', \operatorname{grad}' F) = 0, \qquad \dot{\mathfrak{E}}' + \frac{\partial F}{\partial C'}[\mathfrak{E}', \mathfrak{k}] + [\mathfrak{K}', \operatorname{grad}' F] = 0. \tag{10'}$$

Die Gln. (10) und (10′) sind in bezug auf die Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ symmetrisch und stellen auch eine Reduktion unseres Problems auf acht Freiheitsgrade dar.

[5] Poincaré, Methodes nouvelles, 1892, S. 38.

[6] Milankowitsch, Bull. Acad. roy. Belgrad **6**, 56 [1939].